Шифр: А-36

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2018/2019
Ленинградская область

Район Киришский район

Школа МОУ „Киришский лицей"

Класс 9„Б"

ФИО Кириллов Даниил Константинович

Чистовик.

1	2	3	4	5	Σ
7	5	x	0	0	12

А-36

2) Если предположить, что рыцарь сказал „Моё число меньше 1", тогда его число $x \le 0$, что неверно, т.к. рыцарь не может солгать, сказав вторую фразу, значит один точно лжец.

Если предположить, что рыцарь сказал „Моё число меньше 2", тогда его число $x \le 1$, что неверно, так же как и в первом случае; значит два лжеца точно есть.

Если предположить, что рыцарь сказал, что его число меньше 3, тогда он и сказал, что его число больше 1.

Получим: числа рыцарей:

$1 < x < 3$; $x = 2$ $\quad$ $5 < x < 7$; $x = 6$

$2 < x < 4$; $x = 3$ $\quad$ $6 < x < 8$; $x = 7$

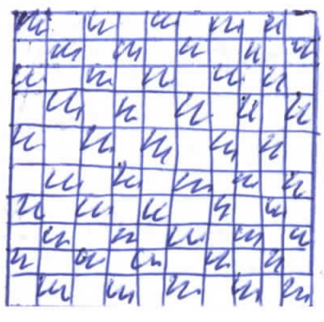
$3 < x < 5$; $x = 4$ $\quad$ $7 < x < 9$; $x = 8$

$4 < x < 6$; $x = 5$ $\quad$ $8 < x < 10$; $x = 9$

Тогда лжецы сказали, что их числа меньше 1, меньше 2, больше 9, больше 10. Т.к. в условии не сказано, что числа различные, то такое вполне может быть, значит максимально может быть 8 рыцарей.

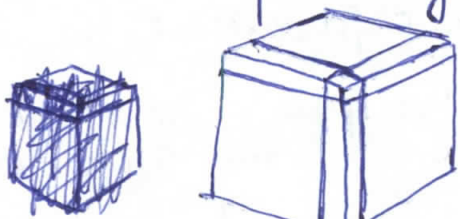
5) Рассмотрим куб в разрезе. Возьмём одну грань ($1000 \times 1000 \times 1$) и на её примере посмотрим, какое кол-во кубиков можно максимально раскрасить.

Т.к. площадь : 2, то лучший вариант - разбить на клетки в шахматном порядке. Получим:



В таком случае на каждой грани ~~это~~ будет по 500 тыс. закрашенных клеток.

Рассмотрим куб в объёмном изображении:



Из рисунка видно, что каждый крайний ряд грани принадлежит и другой грани, тогда общая площадь левой, правой, передней и задней грани равна:

$4\cdot 1000^2-4000=3996000$ кубиков, тогда общая площадь верхней и нижней: $2\cdot 998^2=996004\cdot 2=1992008$, тогда общая площадь:

$3996000+(996004\cdot 2)=3996000+1992008=5988008$ кубиков, значит

закрашены из них $\frac{5988008}{2}=2994004$ кубика.

Ответ: 2994004 кубика закрашено.

1) Т.к. квадратные трёхчлены приведённые, то $a_1=a_2=1$.

Получим: ~~$a_1(x-1$~~

$f(x)$: $x_1=\frac{-b_1+\sqrt{D_1}}{2a}$ $\quad g(x)$: $x_3=\frac{-b_2+\sqrt{D_2}}{2a}$

$x_2=\frac{-b_1-\sqrt{D_1}}{2a}$ $\quad x_4=\frac{-b_2-\sqrt{D_2}}{2a}$, тогда:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{-2b_1+\sqrt{D_1}-\sqrt{D_1}-2b_2+\sqrt{D_2}-\sqrt{D_2}}{2a}=\frac{-2(b_1+b_2)}{2}=-(b_1+b_2).$$

Приведённый квадратный трёхчлен имеет вид:

$ax^2+bx+c=0$; где $a=1$.

$$\begin{cases}1+b_1+c_1=4+2b_2+c_2,\\ 4+2b_1+c_1=1+b_2+c_2 \mid\cdot(-1)\end{cases}$$

$$\begin{cases}1+b_1+c_1=4+2b_2+c_2,\\ -3-b_1=3+b_2\end{cases}$$

$-b_1-b_2=6$, значит $x_1+x_2+x_3+x_4=-(b_1+b_2)=6$

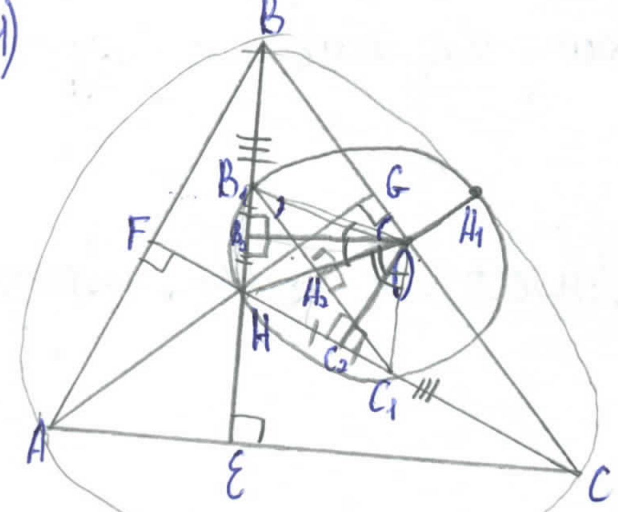
Чистовик:

3) Предположим, что по часовой стрелке числа возрастают; т.к. при делении меньшего натурального числа на большее в остатке остаётся само это число, то это невозможно, т.к в остатке должно получиться лишь два числа (x или y).

Если числа будут идти в разнобой, например $n_1>n_2$; $n_2>n_3$; $n_3<n_4$, то при делении большего на меньшее может получаться какой-то одинаковый остаток, но при делении меньшего на большее будет само это число, а т.к. все числа различны, то это не удовлетворяет условию, значит по часовой стрелке числа убывают.

Т.к. по часовой стрелке числа убывают, то они могут давать в остатке два различных числа (x или y), но при этом против часовой стрелки они будут возрастать и давать в остатке самого себя, а т.к. числа различны, то и остатки будут различны, чтд.

4)



Дано: $\triangle ABC$

$AG \perp BC$, $CF \perp AB$, $BE \perp AC$

$BE \cap AG \cap CF = H$

$BC_1 \parallel BC$

окр $\omega(O;R)$ - описанная

$R = OH = OC_1 = OB_1$

Д-ть: окр Γ касается окр $\omega(O;R)$

Док-во:

1) Т.к. OH, OB_1, OC_1 - радиусы, то $OH = OB_1 = OC_1$.

2) Проведём серединные перпендикуляры из ΔB_1HC_1; они пересекутся в точке O - центр описанной окружности. Т.к. ΔB_1OH, ΔOHC_1 - равнобедр., то по св-ву OB_2, OC_2 - медианы, высоты и биссектрисы

3) Рассмотрим $\Delta B_1O\cancel{H_2}$ и ΔOC_1H_2:

1. $OB_1 = OC_1$ как радиусы окружности
2. OH_2 - общая сторона
3. $B_1H_2 = H_2C_1$ по построению (п.2)

Значит по трём сторонам $\Delta B_1OH_2 = \Delta OC_1H_2$.

4) ~~Т.к. $\Delta B_1OH_2 = \Delta OC_1H_2$, то~~

Т.к. ΔOH_2C_1: $\angle OH_2C_1 = 90°$, то $\angle H_2OC_1 + \angle OC_1H_2 = 90°$.

Т.к. $B_1C_1 \parallel BC$, то $\angle OC_1H_2 = \angle C_1OC$ как накрест лежащие углы при секущей C_1O, тогда $H_2O \perp BC$, значит $HO \perp BC$.

5) Т.к. $HO \perp BC$, O - центр описанной окружности, то HO - серединный перпендикуляр, тогда ~~по~~ ΔBHC - равнобедренный.

6) $\Delta BHF = \Delta CHE$ по гипотенузе и острому углу ($\angle BFA = \angle HEC = 90°$)

1. $HC = BH$ по доказанному
2. $\angle FHB = \angle EHC$ по св-ву вертикальных углов.

Тогда $HF = HE$, значит $CF = BE$, $BF = EC$.

7) $\Delta ABE: \angle AEB = 90° = \Delta CFA: \angle CFA = 90°$ по катету и противолеж. углу:

1. $BE = CF$ по доказ.
2. $\angle A$ - общий

Тогда $AE = AF$, значит ΔABC - ~~п~~ равнобедр и точка O совпадает с точкой G.

Чистовик.

6.1) Т.к. даны 4 последовательных числа, то это числа:

x; $x+1$; $x+2$; $x+3$; при $x>100$.

6	7	8	9	10	Σ
7	7	0	0	0	14

Если x - чётное, то:

$(x+1)+(x+2)+(x+3)=3x+6$

$\frac{3x+6}{3}=x+2$

$\frac{x+2}{2}=0,5x+1$ (т.к. $x \vdots 2$)

$\frac{0,5x+1}{0,5x+1}=1$.

Т.к. $x>100$, то $0,5x+1>51$, значит все делители различны.

Если x - нечётное, то

$x+x+1+x+2=3x+3$

$\frac{3x+3}{3}=x+1$

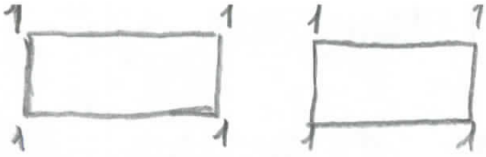
$x+1$ - чётное число, тогда $\frac{x+1}{2}=0,5x+0,5$.

Т.к. x - число нечётное, то $0,5x+0,5$ - число натуральное, тогда

$\frac{0,5x+0,5}{0,5x+0,5}=1$, значит сумма $x+x+1+x+2$ имеет 3 различных натуральных делителя: 3; 2; $0,5x+0,5>50,5$.

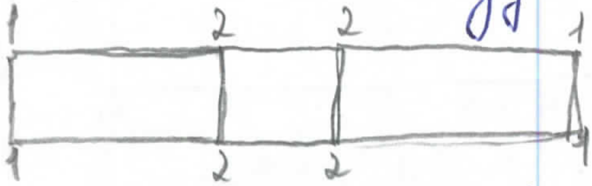
7.2) Т.к. ~~прямоугольники~~ стороны прямоугольников параллельны сторонам стола, прямоугольники не могут иметь 4 общие вершины, то они могут иметь $0 \le x \le 2$ общих вершин. ~~Т.к. два прямоугольника не могут иметь 3 общие вершины, то~~

Положим два прямоугольника так, что они не имеют общих вершин, но одна пара сторон лежит на одной прямой:

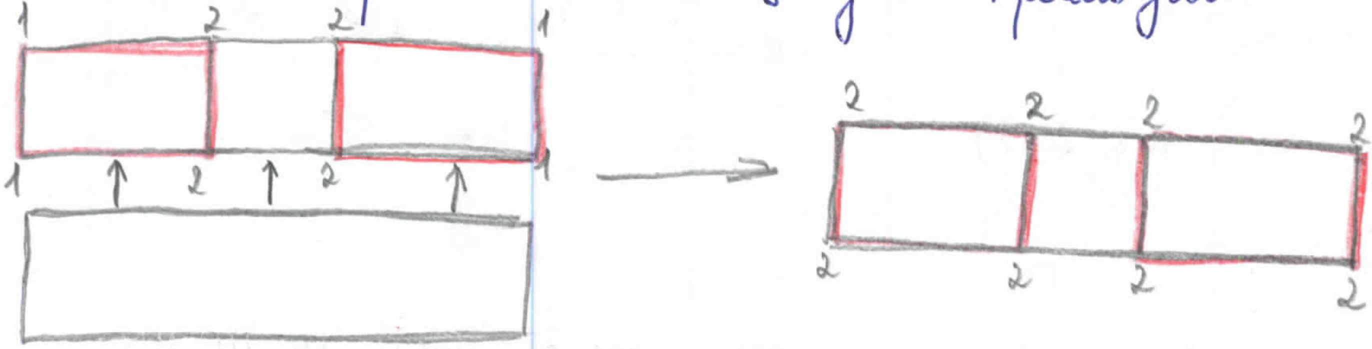


Цифрами обозначим, к скольким прямоугольникам принадлежит вершина.

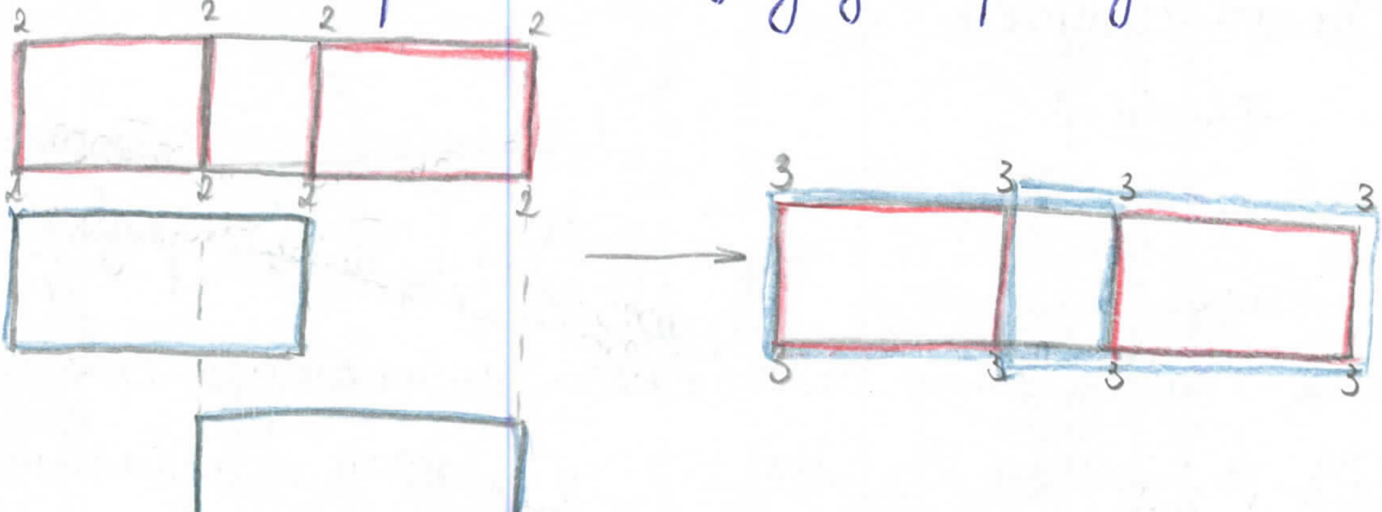
Вместим между ними ещё один прямоугольник:



Затем накроем всё это ещё одним прямоугольником:



Затем накроем это ещё двумя прямоугольниками:



Получим, что каждая вершина принадлежит ровно трём прямоугольникам.

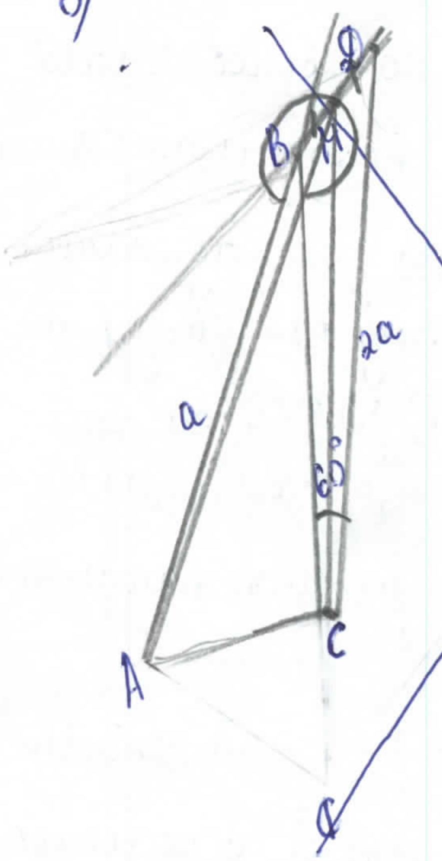
Чистовик.

10б) Т.к. Пете нужно, чтобы получилось наибольшее число, то ему следует выписать 100 одинаковых неотрицательных чисел, т.к. если он ~~выпишет~~ выберет хоть два различных числа, то он даст Васе путь к меньшему произведению, т.к. в сумме все числа должны давать 1; для Пети это недопустимо, значит он выпишет $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_{100} = 0{,}01$.

После этого у Васи уже не будет выбора, и он напишет на доске число 0,0001.

9) Рассмотрим произвольный n-угольник. В нём может быть $(n-3)$ диагоналей, проведённых из одной вершины. Всего же их в n-угольнике получится $n(n-3)$, где n - кол-во вершин. В данном случае ~~нас~~ необходимы n-угольники, где либо одна закрашенная ~~вершина~~ чёрным вершина, либо одна, закрашенная белым, т.к. при других исходах диагонали разноцветные будут пересекаться внутри n-угольника, а диагонали, проведённые из одной вершины не пересекаются. Т.к. окрасить одну вершину в белый можно n способами, а окрасить одну вершину в чёрный тоже n способами (т.к. n - кол-во вершин), то всего „хороших" раскрасок 2n.

8)



Дано: $\triangle ABC$

$D \in BD$: BD-биссектриса ($\angle ABD = \angle CBD$)

$\angle BCD = 60°$

$CD = 2AB = 2a$

$AB = a$

$BM = MD$

Д-ть: $\triangle AMC$-равнобедр.

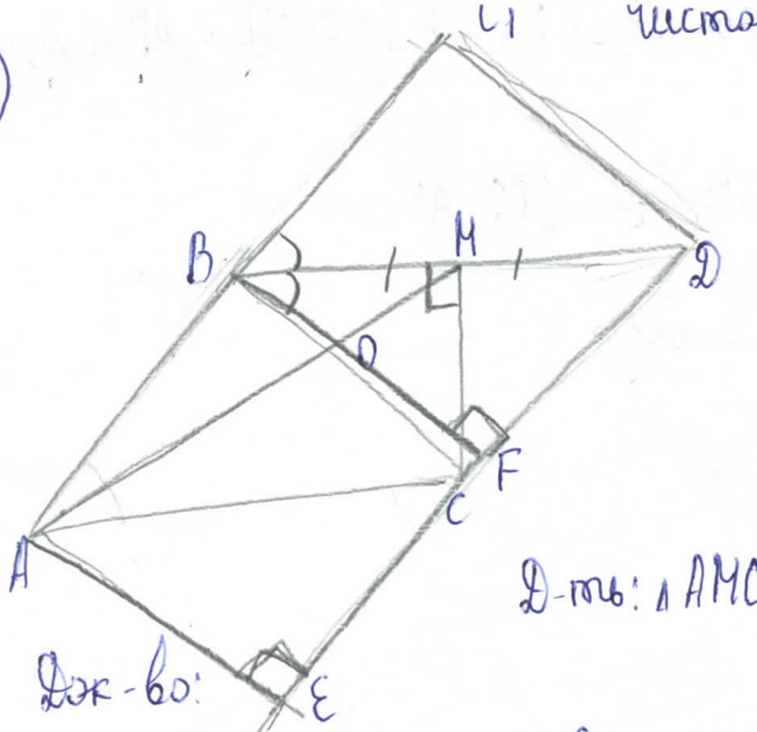
Док-во:

10) Т.к. сумма должна составлять 1, то:

$x_1 + x_2 + x_3 \ldots + x_{100} = 1$.

Т.к. Васе нужно разбить числа на 50 пар, то Пете необходимо среди 100 чисел выбрать 49 нулей; тем самым он не позволит Васе получить к 0 и увеличит минимальное произведение; затем он должен выписать $\frac{1}{51}$ 51 раз; так он сможет получить наибольшее произведение; у Васи не будет выбора и на доске появится число $\frac{1}{2601}$.

8)



Дано: $\triangle ABC$

BD - внешняя биссектриса;

$\angle CBD = \angle DBC_1$

$BM = MD$

$CD = 2AB$

$\angle BCD = 60^\circ$

Д-ть: $\triangle AMC$ - равнобедр.

Док-во:

1) Построим точку C_1 симметричную C относительно прямой BD.

2) Т.к. $BC \parallel C_1D$, то $\angle CBD = \angle BDC_1$ как накрест лежащие углы при $BC \parallel C_1D$ и секущей BD, тогда $\triangle BC_1D$ - равнобедр., значит $\angle C_1BD = \angle C_1DB$. Т.к. $\angle BC_1D = 60^\circ$, то $\triangle BC_1D$ - равносторонний.

3) $\triangle BC_1D = \triangle BCD$ по ~~дв~~ стороне и двум прилеж. углам:

1. BD - общая сторона
2. $\angle C_1BD = \angle DBC$ по усл.
3. $\angle CBD = \angle C_1DB$ как накрест. леж. углы при $BC \parallel C_1D$ и секущей BD.

4) Тогда $\triangle BCD$ - равносторонний, значит $BD = BC = CD$; $\angle DBC = \angle BCD = \angle BDC$.

4) Т.к. $\triangle BCD$ - равносторонний, то CM - высота и биссектриса, тогда $\angle BMC = \angle CMD = 90^\circ$. $\angle ABC = 60^\circ$ как смежный с $\angle CBC_1 = 2\angle CBD$.

5) $AB \parallel CD$, т.к. $\angle ABC = \angle BCD$, а это накрест лежащие углы при секущей BC.

6) $\angle BCM = \angle MCD = 30^\circ$, т.к. CM - биссектриса

7) Т.к. $AB = \frac{1}{2}CD$, то $AB = BM = MD$, тогда $\triangle ABM$ - равнобедренный, значит $\angle BAM = \angle BMA = 30^\circ$.

8) Опустим перпендикуляры $AE \perp CD$, $BF \perp CD$. Т.к. $AB \parallel CD$, то по св-ву $\angle EAB = 90^\circ$.

~~9) Т.к. $\angle BCM = 30^\circ$, то по св-ву $BM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}CD = AB$, значит~~

9) $\angle AMC = 90^\circ - \angle BMA = 60^\circ$.

$\angle MAC = 60^\circ$, значит $\triangle AMC$ - равнобедр.